

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/117/151-155>

Şahnaz Qədimova

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti

Magistrant

<https://orcid.org/0009-0008-4399-6967>

kadimovashahnaz01@gmail.com

Parabolik tənlik məsələlərinin həlli üçün sonlu fərqlər üsulu

Xülasə

Sonlu fərqlər üsulu, parabolik tənliklərin ədədi həlli üçün geniş tətbiq olunan üsullardan biridir. Bu yanaşmada diferensial tənliklər diskretləşdirilərək sonlu fərq tənliklərinə çevrilir. Açıq, qeyri-açıq və Crank-Nicholson sxemləri müxtəlif sabitlik və yaxınlaşma xüsusiyyətlərinə malikdir. Hesablama prosesində Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) şərti sabitliyi təmin etmək üçün əsas faktorlardan biridir. Düzgün zaman və məkan addımları seçilmədikdə, həll qeyri-sabit ola bilər. Bu üsul, istilikkeçirmə, diffuziya və digər riyazi modellərdə effektiv tətbiq olunur.

Açar sözlər: sonlu fərqlər üsulu, differensial tənliklər, aşkar və qeyri-aşkar sxemlər, yaxınlaşma, sabitlik, Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) şərti

Shahnaz Qadimova

Azerbaijan State Oil and Industry University

master student

<https://orcid.org/0009-0008-4399-6967>

kadimovashahnaz01@gmail.com

The Finite Difference Method for Solving Boundary Value Problems of Parabolic Equations

Abstract

The finite difference method is one of the widely applied numerical techniques for solving parabolic equations. In this approach, differential equations are discretized and transformed into finite difference equations. Explicit, implicit, and Crank-Nicholson schemes exhibit different stability and convergence properties. During the computation process, the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition is a key factor in ensuring stability. If the time and spatial steps are not chosen correctly, the solution may become unstable. This method is effectively used in mathematical models of heat conduction, diffusion, and other physical processes.

Keywords: finite difference method, differential equations, explicit and implicit schemes, convergence, stability, Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition

Giriş

Ümumiyyətlə, riyazi fizika məsələlərində və xüsusən istilik keçiriciliyi məsələlərində, 1-ci növ sərhəd şərtləri hesablama sahəsinin sərhədindəki nöqtələrdə dəqiq olaraq yaxınlaşdırılır və bu fakt, bütün hesablanmış sahədə approksimasiya qaydasına heç bir təsir etmir. Bunu 2-ci və 3-cü növ sərhəd şərtlərinin approksimasiya haqqında demək olmaz, çünki bu şərtlərdə axtarılan funksiyanın məkan dəyişəni üzrə birinci dərəcəli törəməsi mövcuddur, bunun nəticəsində sərhəd nöqtələrində approksimasiya sırası hesablamaların daxili nöqtələrindəki approksimasiya sırasından aşağı ola bilər (Bahvalov, Židkov, Kobel'kov, 2007). Bu məqalədə parabolik tipli xüsusi törəməli diferensial tənliklərin ədədi həlli üçün sonlu fərqlər üsuluna əsaslanan üsullar araşdırılır. Məqsəd, bu üsulların əsas prinsiplərini və tətbiq imkanlarını təhlil etmək, xüsusilə sərhəd şərtlərində törəmələr olan istilik keçiriciliyi məsələləri üçün bircins və konservativ sxemlərin qurulmasını, aşkar və qeyri-aşkar fərq

sxemlərinin sabitliyini və yaxınlaşma xüsusiyyətlərini qiymətləndirməkdir (Berezin, Židkov, 1960). Tədqiqat çərçivəsində həmçinin Krank-Nikolson sxemi, N.N. Yanenkonun kəsir addımlar üsulu və V.F. Formalevin ekstrapolyasiya ilə alternativ istiqamətlər üsulu da nəzərdən keçirilir. Bu işin predmeti – parabolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli üçün ədədi yanaşmaların öyrənilməsidir (Danko, Popov, Koževnikova, 1997).

Tədqiqat

Məsələnin qoyuluşu və riyazi həlli

Daxili qovşaqlarda diferensial tənliyi yaxınlaşdırmaqla, yəni bircins təxmini sonlu fərqlər sxemini əldə etməklə 2-ci və 3-cü növ sərhəd şərtləri ilə sərhədlərdə verilmiş approksimasiya qaydasının qorunması metodologiyasını nəzərdən keçirək. İstilik keçiriciliyi tənliyi üçün üçüncü başlanğıc sərhəd məsələsi nəzərdən keçirilir (Demidoviç, Maron, 1966):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, 0 < x < l, t > 0; \quad (2.54)$$

$$\alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), x = 0, t > 0; \quad (2.55)$$

$$\gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_1(t), x = l, t > 0; \quad (2.56)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), t = 0. \quad (2.57)$$

Sonlu fərqlər şəbəkəsinin (2.2) daxili qovşaqlarında (2.54) tənliyi üçün qapalı sonlu fərqlər sxemi aşağıdakı kimidir

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a^2}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + \frac{b}{2h} (u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}) + cu_j^{k+1} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (2.58)$$

Əgər sərhəd şərtlərində (2.55) və (2.56) birinci dərəcəli törəmələri aşağıdakı sxemlə (sağ və sol tərəflərdə sonlu fərqlər nisbəti ilə) yaxınlaşdırsaq (Kabdykajyr, 2005):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h).$$

onda sərhəd şərtləri birinci sıraya approksimasiya edilir və qlobal dərəcə birinci sıraya bərabərdir. Sərhəd qovşaqlarında approksimasiya sırasını ikiye bərabər saxlamaq üçün biz $x = 0$ yaxınlığındakı u_1^{k+1} -in qiymətini üçüncü törəmə daxil olmaqla x dəyişəni üçün Teylor seriyasına parçalayırıq və u_{N-1}^{k+1} - $x = l$ nöqtəsinə yaxın oxşar sıra əldə edirik (sərhəd qovşaqlarında $u(x, t)$ funksiyasının zaman və ikinci x -də birinci törəmələri olduğunu fərz etsək):

$$u_1^{k+1} = u(0 + h, t^{k+1}) = u_0^{k+1} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} h + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3), \quad (2.59)$$

$$u_{N-1}^{k+1} = u(l - h, t^{k+1}) = u_N^{k+1} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} h + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (2.60)$$

Diferensial tənlikdən (2.54) alınan sərhəd qovşaqlarında ikinci törəmə qiymətlərini burada əvəz edək (Kireev, Panteleev, 2006):

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{j=0,N}^{k+1} = \left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{a^2} \cdot u \right)_{j=0,N}^{k+1},$$

və (2.59), (2.60) ifadələrindən $O(\tau + h^2)$ sırası ilə sərhəd qovşaqlarında birinci törəməsinin qiymətlərini tapırıq: $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0,N}^{k+1}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} &= \frac{2a^2}{h(2a^2 - bh)} \cdot (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) - \frac{h}{2a^2 - bh} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0^{k+1} + \frac{ch}{2a^2 - bh} \cdot u_0^{k+1} + O(h^2), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} &= \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)} \cdot (u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) + \frac{h}{2a^2 + bh} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_N^{k+1} - \frac{ch}{2a^2 + bh} \cdot u_N^{k+1} + O(h^2). \end{aligned}$$

$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1}$ -nu (2.55) və $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1}$ -ni (2.56)-da əvəz edərək və müvafiq sərhəd qovşaqlarında (

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} = (u_0^{k+1} - u_0^k) / \tau + O(\tau), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} = (u_N^{k+1} - u_N^k) / \tau + O(\tau)$$

üçün) əldə edilmiş əlaqələri təqribi hesablayaraq, hər birində iki naməlum olan sərhəd qovşaqları üçün cəbri tənliklər əldə edirik:

$$b_0 \cdot u_0^{k+1} - c_0 \cdot u_1^{k+1} = d_0 + O(\tau + h^2), \quad j = 0; \quad (2.61)$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - ch - \frac{\beta}{\alpha}(2a^2 - bh), \quad c_0 = \frac{2a^2}{h};$$

$$d_0 = \frac{h}{\tau} \cdot u_0^k - \varphi_0(t^{k+1}) \cdot \frac{2a^2 - bh}{\alpha};$$

$$-a_N \cdot u_{N-1}^{k+1} + b_N \cdot u_N^{k+1} = d_N + O(\tau + h^2), \quad j = N; \quad (2.62)$$

$$a_N = \frac{2a^2}{h}, \quad b_N = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - ch + \frac{\delta}{\gamma}(2a^2 + bh), \quad c_N = 0;$$

$$d_N = \frac{h}{\tau} \cdot u_N^k - \varphi_1(t^{k+1}) \cdot \frac{2a^2 + bh}{\gamma}$$

Beləliklə, (2.61) 3-cü növ (2.55) sərhəd şərtinin $x = 0$ sol sərhədində sonlu fərq approksimasiyasıdır və (2.62) diferensial tənliyin (2.54) sonlu fərq approksimasiyasında (2.58) olduğu kimi eyni yaxınlaşma ardıcılığını qoruyan $x = 1$ sağ sərhədində üçüncü növ (2.56) sərhəd şərtinin sonlu fərq yaxınlaşmasıdır (Koşlâkov, Gliner, Smirnov, 1962).

Sərhəd sonlu fərq tənlikləri (2.61), (2.62) şəbəkə funksiyasının iki qiymətinin hər birinə təyin edildikdə, cəbri tənliklər (2.58) aşağıdakı kimi yazılır:

$$-a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} - c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad (2.63)$$

$$a_j = \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h}, \quad b_j = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{\tau} - c; \quad c_j = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b}{2h}, \quad d_j = \frac{1}{\tau} \cdot u_j^k,$$

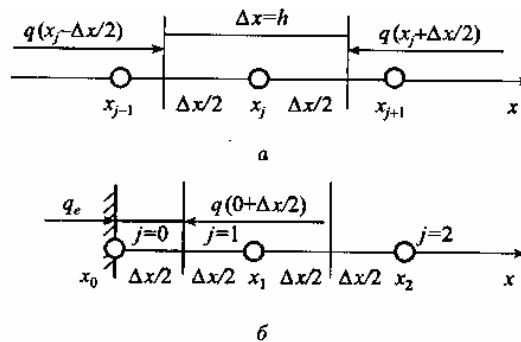
Üç diaqonalı matrislə olan xətti tənliklər sistemini (XTS) alacağıq, bunu irəliləmə (proqnozlaşdırma) üsulu ilə həll edəcəyik ($a_0 = 0$; $c_N = 0$)

$$A_j = \frac{c_j}{b_j - a_j A_{j-1}}; \quad (2.64)$$

$$B_j = \frac{d_j + a_j B_{j-1}}{b_j - a_j A_{j-1}} \left(A_0 = \frac{c_0}{b_0}; B_0 = \frac{d_0}{b_0}; A_N = 0 \right), \quad j = \overline{0, N};$$

$$u_j^{k+1} = A_j u_{j+1}^{k+1} + B_j, \quad (u_N^{k+1} = B_N), \quad j = N, N-1, \dots, 0. \quad (2.65)$$

Sonlu fərqlərlə aparılan approksimasiya zamanı məsələnin diferensial əlaqələrinin (2.54)–(2.57) əsasında qurulduğu qorunma qanunları təmin olunur. Bunun üçün əvvəlcə $b=c=0$ olduqda istilik keçiriciliyi diferensial tənliyinin (2.54) çıxarılmasını nəzərdən keçirək (şəkil 2.3 a).



Şəkil 2.3. Konservasiyanın qorunması yolu ilə törəmələri əhatə edən sərhəd şərtlərinin approksimasiyası

Enerjinin saxlanması qanununa görə, bu istilik axınlarının cəmi bu elementdə Δx enerji dəyişikliyinə bərabərdir ki, bu da elementin kütləsi $\rho \Delta x$ -nin birinci dərəcəli törəməsinə, materialın istilik tutumuna c və zamana görə $u(x, t)$ temperaturuna mütənasıbdır (Plis, Slivina, 1994).

$$-\lambda \cdot \frac{\partial u(x_j - \Delta x/2)}{\partial x} - \left(-\lambda \cdot \frac{\partial u(x_j + \Delta x/2)}{\partial x} \right) = c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Bu tənliyi Δx -ə bölmək və $\Delta x \rightarrow 0$ - həddinə keçməklə bir ölçülü istilik keçiriciliyi tənliyini əldə edirik.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

Beləliklə, diferensial tənliyin (2.54) sonlu fərq yaxınlaşması həm istilik axınlarını, həm də Δx elementinin udduğu enerjini, yəni (2.58) diferensial tənliyinin alınmasında iştirak edən bütün enerji növlərini nəzərə alır (Rihtmajer, 1960).

Nəticə

Riyazi fizikanın istilik keçiriciliyi, diffuziya, mayelərin hərəkəti, akustika, elektromaqnetizm, dalğa mexanikası, şüa enerjisinin ötürülməsi və elastik vibrasiya kimi müxtəlif sahələrində yaranan sərhəd məsələlərinin analitik həlli yalnız bəzi xüsusi hallarda mümkündür. Buna görə də tətbiqi məsələlərin ədədi üsullarla həlli daim elmi tədqiqatların diqqət mərkəzində olmuşdur.

Müasir dövrdə kompüter texnologiyalarının sürətli inkişafı nəticəsində, hətta analitik yolla həll edilə bilən məsələlər belə, ədədi üsullarla daha səmərəli və sürətli şəkildə həll olunur. Bu iş

çərçivəsində parabolik tipli qismən diferensial tənliklərin həlli üçün sonlu fərq üsullarına əsaslanan müxtəlif metodlar araşdırılmışdır.

Aparılmış tədqiqatın nəticəsi olaraq, bu üsulların sabitlik, yaxınlaşma və dəqiqlik baxımından üstünlükləri qiymətləndirilmiş və onların tətbiq sahələri müəyyənləşdirilmişdir. Xüsusilə Krank-Nikolson sxemi və dəyişən istiqamətlər metodu sabitlik və dəqiqlik baxımından effektiv yanaşma kimi seçilmişdir.

Ədəbiyyat

1. Bahvalov, N. S., Židkov, N. P., & Kobel'kov, G. M. (2007). *Čislennye metody*, 636. BINOM. Laboratoriâ znaniy.
2. Berezin, I. S., & Židkov, N. P. (1960). *Metody vyčislenij*, 524. Nauka.
3. Danko, P. E., Popov, A. G., & Koževnikova, T. Â. (1997). *Vysšaâ matematika v upražneniâh i zadačah*, 486. Vysšaâ škola.
4. Demidovič, B. P., & Maron, I. A. (1966). *Osnovy vyčislitel'noj matematiki*, 400. Nauka.
5. Kabdykajyr, K. (2005). *Kurs vysšej matematiki* (134 s.). Almaty: Kazahskij universitet.
6. Kireev, V. I., & Panteleev, A. V. (2006). *Čislennye metody v primerah i zadačah*, 480. Vysšaâ škola.
7. Košlâkov, N. S., Gliner, É. B., & Smirnov, M. M. (1962). *Differencial'nye uravneniâ matematičeskoj fiziki*, 710. Fizmatlit.
8. Plis, A. I., & Slivina, N. A. (1994). *Laboratornyj praktikum po vysšej matematike*, 416. Vysšaâ škola.
9. Rihtmajer, R. D. (1960). *Raznostnye metody rešení kraevyh zadač* (262 s.) [Per. s angl.]. Moskva: Inostrannaâ literatura.
10. Râben'kij, V. S. (1983). *Vvedenie v vyčislitel'nuû matematiku*, 754. Nauka.
11. Samarskij, A. A. (1983). *Teoriâ raznostnyh shem*, 726. Nauka.
12. Seravajkin, S. Â. (2004). *Sekvencial'nye modeli matematičeskoj fiziki*, 192. Almaty.
13. Tihonov, A. N., & Samarskij, A. A. (1966). *Uravneniâ matematičeskoj fiziki*, 735. Fizmatlit.
14. Formalev, V. I., & Reviznikov, D. L. (2004). *Čislennye metody*, 400. Fizmatlit.